Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ με $a>0$ ώστε η f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$.

ΝΔΟ $\exists x_0\in(0,a)$: $f'(x_0)=\dfrac{2f(a)+af'(a)}{3a}$.

ΛΥΣΗ

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,a)$ $\Rightarrow$ f συνεχής στο $[0,a]$

Εφαρμόζοντας ΘΜΤ παίρνουμε ότι:

$\exists \xi\in(0,a)$ ώστε: $f(a)-f(0)=a\cdot f'(\xi)$, $0<\xi<a$

$\Rightarrow f(a)=a\cdot f'(\xi)$, $0<\xi<a$ (1)

$$\frac{2f(a)+af'(a)}{3a}\overset{(1)}{=}\frac{2\cancel{a}f'(\xi)+\cancel{a}f'(a)}{3\cancel{a}}=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}f'(a).$$

Επίσης, η f' συνεχής στο $[0,a]$ $\Rightarrow$ f' φραγμένη (Από §4.5. σελ. 236 βιβλίο Ντούγια).

Άρα, ξέρουμε ότι για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση ισχύει το θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου άρα:

$$m\le f'(a)\le M\Rightarrow \frac{1}{3}m\le\frac{1}{3}f'(a)\le\frac{1}{3}M$$
$$m\le f'(\xi)\le M\Rightarrow \frac{2}{3}m\le\frac{2}{3}f'(\xi)\le\frac{2}{3}M$$

προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}m+\frac{2}{3}m\le\frac{1}{3}f'(a)+\frac{2}{3}f'(\xi)\le\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\le\frac{1}{3}f'(a)+\frac{2}{3}f'(\xi)\le M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\le f'(x_0)\le M.$$

Δηλ. $\exists x_0\in(0,a)$: $\frac{1}{3}f'(a)+\frac{2}{3}f'(\xi)=f'(x_0)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\frac{2f(a)+af'(a)}{3a}.$$